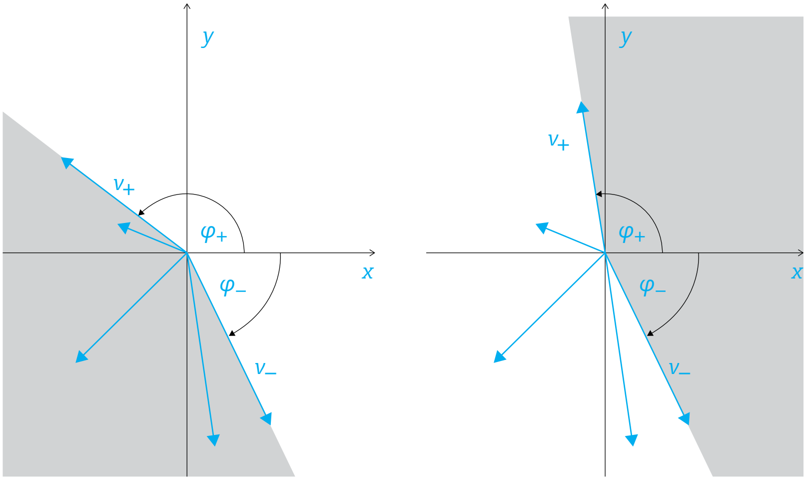
Niech φ_- będzie minimalnym kątem, jaki wektor z S_- tworzy z dodatnią częścią półosi x. Niech $v_- = (x_-, y_-)$ będzie dowolnym z wektorów, które uzyskują ten kąt. Analogicznie definiujemy φ_+ i $v_+ = (x_+, y_+)$ dla S_+ (patrz rys. 1). Poniższy lemat pokazuje związek pomiędzy pytaniem, na które chcemy odpowiedzieć, a sumą kątów φ_- i φ_+.

Lemat 1. Następujące trzy warunki są równoważne:

- $\varphi_- + \varphi_+ < 180°$,
- istnieje dodatnia liczba całkowita a, taka że wektor $(a, 0)$ może być uzyskany jako suma wektorów ze zbioru $S_- \cup S_+$,
- $-x_+ \cdot y_- + x_- \cdot y_+ > 0$.

Dowód. Mówimy, że wektor v jest *nieujemną kombinacją* wektorów $v_1, \ldots, v_k$, jeśli $v = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i$ dla pewnych nieujemnych liczb rzeczywistych a_i. Wprowadźmy również oznaczenie

$$w = (-y_-) \cdot v_+ + y_+ \cdot v_- = (-x_+ \cdot y_- + x_- \cdot y_+, 0).$$



Rysunek 2: *Po lewej: ilustracja sytuacji dla $\varphi_- + \varphi_+ \geqslant 180°$, szary obszar odpowiada nieujemnym kombinacjom wektorów z S. Po prawej: ilustracja sytuacji dla $\varphi_- + \varphi_+ < 180°$, szary obszar odpowiada nieujemnym kombinacjom wektorów $\{v_-, v_+\}$.*

Rozważmy przypadek $\varphi_- + \varphi_+ \geqslant 180°$ (patrz rys. 2). W tym przypadku żaden punkt na dodatniej półosi x nie jest nieujemną kombinacją wektorów z $S_- \cup S_+$.

Wszystkie nieujemne kombinacje leżą w wycinku płaszczyzny ograniczonym przez wektory v_- i v_+, rozciągającym się od v_- do v_+ zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Dlatego nie jest możliwe, aby dotrzeć na dodatnią połowę osi x przez dodawanie wektorów z $S_- \cup S_+$. Ponadto, ponieważ wektor w jest nieujemną kombinacją v_- i v_+, zachodzi $-x_+ \cdot y_- + x_- \cdot y_+ \leqslant 0$.

Rozważmy teraz przypadek, gdy $\varphi_- + \varphi_+ < 180°$. Zauważmy, że wektor w jest nieujemną kombinacją v_- i v_+ z dodatnimi całkowitymi współczynnikami, co oznacza, że wektor w może być wyrażony jako suma skończonego ciągu złożonego z wektorów v_- i v_+. Ponieważ kąt pomiędzy v_- i v_+ nie wynosi 180°, wektory te nie są współliniowe i $w \neq (0,0)$. Co więcej, wszystkie nieujemne kombinacje v_- i v_+ znajdują się wewnątrz wycinka płaszczyzny ograniczonego przez v_- i v_+, rozpościerającego się zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara od v_+ do v_-. To oznacza, że żaden punkt na ujemnej połowie osi x nie jest nieujemną kombinacją v_- i v_+. Zatem $-x_+ \cdot y_- + x_- \cdot y_+$, czyli pierwsza współrzędna wektora w, jest dodatnia, co kończy dowód. □

Zarówno v_+, jak i v_- mogą być łatwo wyznaczone w czasie liniowym. Bez utraty ogólności, ponieważ oba przypadki są symetryczne, skupmy się na wyznaczeniu v_+. Rozważmy dwa wektory $u = (x_u, y_u)$ i $w = (x_w, y_w)$ ze zbioru S_+. Kąt między u a dodatnią półosią x jest mniejszy niż kąt między w a dodatnią półosią x wtedy i tylko wtedy, gdy $x_u/y_u > x_w/y_w$. To wynika z własności funkcji cotangens i może być użyte do porównania pary wektorów z S_+ w czasie stałym. Zgodnie z Lematem 1 wystarczy na końcu obliczyć znak wyrażenia $-x_+ \cdot y_- + x_- \cdot y_+$, aby wyznaczyć poszukiwaną odpowiedź.

Osiowa zupełność a odwracalność

Udowodnimy teraz, że jeśli S jest osiowo zupełny, to każdy ruch superskoczka można odwrócić. Ta własność jest przydatna w drugiej części naszego algorytmu, gdzie sprawdzamy zupełność zbioru osiowo zupełnego.

Lemat 2. Jeśli zbiór S jest osiowo zupełny, to jest odwracalny.

Dowód. Z definicji osiowej zupełności wynika, że istnieją wektory $(a,0)$, $(-b,0)$, $(0,c)$ i $(0,-d)$, takie że $a,b,c,d > 0$ i każdy z nich może być wyrażony jako suma skończonego ciągu wektorów ze zbioru S. Rozważmy dowolny wektor $v = (v_x, v_y)$ z S. Wystarczy pokazać, że $-v$ może być wyrażony jako suma skończonej liczby wektorów z S. Jeśli $v = (0,0)$, to twierdzenie jest prawdziwe w sposób trywialny. Dlatego w pozostałej części dowodu zakładamy, że $v \neq (0,0)$.

Rozważmy wektor $(w_x, 0)$, gdzie w_x równa się a, jeśli $v_x < 0$, lub $-b$ w przeciwnym przypadku. Analogicznie rozważmy wektor $(0, w_y)$, gdzie w_y równa